幾何学的BIBDのConstructionについて (実験計画法研究会報告集)

AUTHOR(S):

福田, 悌次郎

CITATION:

福田, 悌次郎. 幾何学的BIBDのConstructionについて (実験計画法研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1967, 25: 115-129

ISSUE DATE:

1967-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/107502

数理解析研究所講究録
25巻 1967年 115-129

幾何学的BIBDのConstructionについて

海上保安大　福田悌次郎

1　まえがき

pを素数とするとき　ガロア体$GF(m=p^n)$上の有限t次元射影空間$PG(t,m)$における$d(<t)$次元線形部分空間（d-flat）の全体を考えると　$v=\phi(t,0,m)$, $b=\phi(t,d,m)$, $k=\phi(d,0,m)$, $r=\phi(t-1,d-1,m)$, $\lambda=\phi(t-2,d-2,m)$をparametersとするBIBD（今後このdesignを$PG(t,m):d$で表わす）が得られるが[2]，我々はこのdesignを組織的に構成するために，C.R.Rao [4]が導入したcycleの概念を用いてd-flatsの構造を明らかにし，d-flatsの全体をcyclesによって類別した[5]。

この小論では，これに関連してその後得られた一，二の結果について報告する。

$\tilde{t}=n(t+1)-1$, $\tilde{d}=n(d+1)-1$とおくとき　design $PG(t,m):d$は，design $PG(\tilde{t},p):\tilde{d}$において　cycle $\theta=\phi(t,0,m)$の$\tilde{d}$-flatsのみをblocksに，$GF(p^{\tilde{t}+1})$の原始元xのべきの指数がθ未満の点のみをtreatmentsにとることによっても得られるが[5]，直接構成するためには$GF(m^{t+1})$のminimum functionが必要である。しかしながら，$m=p^n$の場合一般にはそのminimum functionsは知られてい

ないってその構成法について述べる。

次に，BIBD PG(t,m):d において blocks の一部及び treatments の一部を除いて得られる designs の性質を考察する。

2. $GF(m^{t+1})$ の Minimum functions

p を素数とするとき，ガロア体 $GF(p^n)$ の minimum functions についても従来ごく僅かしか知られていなかった。ところが Alanen-Knuth [1] は $p<50$, $p^n<10^9$ の範囲内で $GF(p^n)$ の minimum functions をすべてリストした。一つの $GF(p^n)$ の minimum functions は後述するように $\varphi(p^n-1)/n$ 個存在するが，そのすべてを網羅した complete table は $p^n<1024$ までの範囲で与えられ，それ以上の場合については代表的な一つずつが示されている。そこで $GF(p^n)$ の minimum functions が知られている場合にそれらを利用して $GF(m^{t+1})$ (ただし，$m=p^n$) の minimum functions を作る方法について述べる。

[Lemma 1] $GF(m^{t+1})$ の一つの minimum function $g(x)$ の一零点を α とすれば

$$g(x)=(x-\alpha)(x-\alpha^m)(x-\alpha^{m^2})\cdots(x-\alpha^{m^t}). \tag{2.1}$$

(註) $m=p$ のときはよく知られている結果である。

(証) (i) $GF(m)$ を係数域とする任意の多項式を

$$G(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_i\in GF(m)) \tag{2.2}$$

とすると

$$[G(x)]^p\equiv a_k^p x^{kp}+a_{k-1}^p x^{(k-1)p}+\cdots+a_1^p x^p+a_0^p \pmod p$$

$$[G(x)]^{p^2} = \{[G(x)]^p\}^p$$
$$\equiv a_k^{p^2} x^{kp^2} + a_{k-1}^{p^2} x^{(k-1)p^2} + \cdots + a_1^{p^2} x^{p^2} + a_0^{p^2} \pmod p.$$

よって一般に

$$[G(x)]^{p^l} \equiv a_k^{p^l} x^{kp^l} + a_{k-1}^{p^l} x^{(k-1)p^l} + \cdots + a_1^{p^l} x^{p^l} + a_0^{p^l} \pmod p.$$

特に $l = n$ のとき

$$[G(x)]^m \equiv a_k^m x^{km} + a_{k-1}^m x^{(k-1)m} + \cdots + a_1^m x^m + a_0^m \pmod p.$$

一方, $a_i \in GF(m)$ for all i だから すべての a_i は, Fermat の定理により $a_i^m = a_i$ をみたす. よって

$$[G(x)]^m \equiv a_k x^{km} + a_{k-1} x^{(k-1)m} + \cdots + a_1 x^m + a_0 = G(x^m) \pmod p.$$

したがって一般に

$$[G(x)]^{m^s} \equiv G(x^{m^s}) \pmod p \text{ for all positive integer } s \qquad (2.3)$$

が成立する.

(ii) $g(x)$ を $GF(m^{t+1})$ の一つの minimum function とし, α をその零点の一つとすると, (2.3) から

$$g(\alpha^{m^s}) = p\text{の倍数} \times [g(\alpha)]^{m^s} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, t).$$

即ち, $\alpha, \alpha^m, \alpha^{m^2}, \cdots, \alpha^{m^t}$ は $g(x) = 0$ の根ですべて異なる.

よって

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^m)(x-\alpha^{m^2}) \cdots (x-\alpha^{m^t}). \qquad \text{Q.E.D.}$$

[Proposition 1] $f(x)$ を $GF(p^{n(t+1)})$ の minimum function とし, α をその零点の一つとすると, $f(x)$ は $GF(m^{t+1})$ の n 個の minimum functions $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ の積

$$f(x) = g_1(x)\, g_2(x) \cdots g_n(x) \qquad (2.4)$$

に分解される。　ここに

$$\begin{cases} g_1(x)=(x-\alpha)(x-\alpha^{p^n})(x-\alpha^{p^{2n}})\cdots(x-\alpha^{p^{tn}}) \\ g_2(x)=(x-\alpha^{p})(x-\alpha^{p^{n+1}})(x-\alpha^{p^{2n+1}})\cdots(x-\alpha^{p^{tn+1}}) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ g_n(x)=(x-\alpha^{p^{n-1}})(x-\alpha^{p^{n+(n-1)}})(x-\alpha^{p^{2n+(n-1)}})\cdots(x-\alpha^{p^{tn+(n-1)}}). \end{cases} \tag{2.5}$$

(証)　α は $f(x)$ の零点だから　Lemma 1 により，$f(x)$ は

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha^{p})(x-\alpha^{p^2})\cdots(x-\alpha^{p^n})(x-\alpha^{p^{n+1}})\cdots(x-\alpha^{p^{n(t+1)-1}})$$

で与えられる。　一方 α は $GF(p^{n(t+1)})$ の原始元，即ち，$\alpha^y=1$ をみたす最小の正整数 y が $y=p^{n(t+1)}-1=m^{t+1}-1$ であるような元であるから，α は $GF(m^{t+1})$ の原始元でもある。　よって α を零点にもつ $GF(m^{t+1})$ の minimum function を $g_1(x)$ とすると，Lemma 1 により

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x-\alpha)(x-\alpha^{m})(x-\alpha^{m^2})\cdots(x-\alpha^{m^t}) \\ &= (x-\alpha)(x-\alpha^{p^n})(x-\alpha^{p^{2n}})\cdots(x-\alpha^{p^{tn}}) \end{aligned}$$

である。

同様に，$GF(p^{n(t+1)})$ の原始元 α^p は $GF(m^{t+1})$ の原始元でもあるから，α^p を零点にもつ $GF(m^{t+1})$ の minimum function $g_2(x)$ は

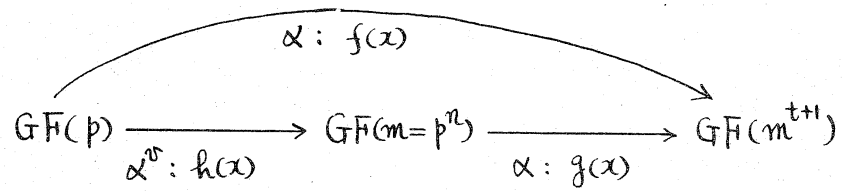
$$g_2(x)=(x-\alpha^{p})(x-\alpha^{p^{n+1}})(x-\alpha^{p^{2n+1}})\cdots(x-\alpha^{p^{tn+1}})$$

以下同様にして定理は証明される。　Q.E.D.

[Remark]　$v=(m^{t+1}-1)/(m-1)$ とおくと，α^v は $GF(m)$ の原始元の一つであるから，α^v を零点とする $GF(m=p^n)$ の minimum function $h(x)$ は

$$h(x)=(x-\alpha^{v})(x-\alpha^{pv})\cdots(x-\alpha^{p^{n-1}v}) \tag{2.6}$$

で与えられる。



minimum function $g(x)$ を用いて $GF(m^{t+1})$ の元を，$GF(m)$ の $t+1$ 個の元の組として座標表現する際 $GF(m)$ の元の間の四則演算が問題になるが，その演算を規定するのがこの $h(x)$ である。

[Proposition 2] (Alanen - Knuth の Proposition の拡張)

$GF(m^{t+1})$ の minimum functions の個数は $\varphi(m^{t+1}-1)/(t+1)$ である。ここに $\varphi(m^{t+1}-1)$ は Euler's function で，$m^{t+1}-1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$ を $m^{t+1}-1$ の素因数分解とするとき 次式で与えられる。

$$\varphi(m^{t+1}-1) = (m^{t+1}-1)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right) \qquad (2.7)$$

(証) α を $GF(m^{t+1})$ の原始元の一つとすると，次のべき表現が得られる。

$$GF(m^{t+1}) = \{0, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{m^{t+1}-1}=1\}.$$

すると，$\alpha^\Delta \in GF(m^{t+1})$ が原始元であるための必要かつ十分条件は $(\Delta, m^{t+1}-1)=1$ であることが容易にわかる。よって，これら m^{t+1} 個の元の中で 原始元の個数は $m^{t+1}-1$ と互に素であるような Δ の個数に等しく，それは $\varphi(m^{t+1}-1)$ で与えられる。

一方 β を $GF(m^{t+1})$ の任意の原始元とし，β を零点にもつ minimum function を $g(x)$ とすると Lemma 1 から

$$g(x) = (x-\beta)(x-\beta^m)(x-\beta^{m^2})\cdots(x-\beta^{m^t}).$$

即ち，$t+1$ 個の原始元 $\beta, \beta^m, \beta^{m^2}, \cdots, \beta^{m^t}$ は $g(x)$ の零点である。した

がって $\varphi(m^{t+1}-1)$ 個の原始元の中の $t+1$ 個ずつは同じ minimum function の零点であるから，minimum functions の個数は $\varphi(m^{t+1}-1)/(t+1)$ である。 Q.E.D

以上の考察により，$GF(p^{n(t+1)})$ の $\varphi(p^{n(t+1)}-1)/n(t+1) = \varphi(m^{t+1}-1)/n(t+1)$ 個の minimum functions がすべて知られている場合には，$GF(m^{t+1})$ のすべての minimum functions を求めることができる。

(例1) $GF(9^2)$ の minimum functions

$f(x)$ として，x^4+x^3+2 をとると

$f(x) = x^4+x^3+2$ in $GF(3^4)$

$= (x-\alpha)(x-\alpha^3)(x-\alpha^9)(x-\alpha^{27})$,

$g_1(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^9) = x^2-(\alpha+\alpha^9)x+\alpha^{10}$ in $GF(9^2)$

$= x^2+\alpha^{30}x+\alpha^{10}$,

$g_2(x) = (x-\alpha^3)(x-\alpha^{27}) = x^2-(\alpha^3+\alpha^{27})x+\alpha^{30}$ in $GF(9^2)$

$= x^2+\alpha^{10}x+\alpha^{30}$,

$h(x) = (x-\alpha^{10})(x-\alpha^{30}) = x^2-(\alpha^{10}+\alpha^{30})x+\alpha^{40}$ in $GF(9=\overset{2}{3})$

$= x^2+2x+2$.

よって，$GF(9)$ の元の演算は $\alpha^{20}+2\alpha^{10}+2=0$ という関係によって規定される。

(例2) $GF(4^4)$ のベキ表現と座標表現

$f(x)$ として，$x^8+x^4+x^3+x^2+1$ をとると

$f(x) = x^8+x^4+x^3+x^2+1$ in $GF(2^8)$

$$= (x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^8)(x-\alpha^{16})(x-\alpha^{32})(x-\alpha^{64})(x-\alpha^{128}),$$

$g_1(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^4)(x-\alpha^{16})(x-\alpha^{64})$ in $GF(4^4)$

$= x^4 + x^3 + \alpha^{85}x^2 + \alpha^{85}x + \alpha^{85}$,

$g_2(x) = (x-\alpha^2)(x-\alpha^8)(x-\alpha^{32})(x-\alpha^{128})$ in $GF(4^4)$

$= x^4 + x^3 + \alpha^{170}x^2 + \alpha^{170}x + \alpha^{170}$,

$h(x) = (x-\alpha^{85})(x-\alpha^{170}) = x^2 + x + 1$ in $GF(4=2^2)$

よって $w_1 = \alpha^{85}$, $w_2 = \alpha^{170}$ とおくと

$$\begin{cases} g_1(x) = x^4 + x^3 + w_1 x^2 + w_1 x + w_1, \\ g_2(x) = x^4 + x^3 + w_2 x^2 + w_2 x + w_2 \end{cases}$$ ただし, $w_1 + w_2 + 1 = 0$.

今 $GF(4^4)$ の minimum function として, $g(x) = x^4 + x^3 + w_1 x^2 + w_1 x + w_1$ をとると 次の table が得られる。

Table 1. $GF(4^4)$ のべき表現と座標表現

power	x^3	x^2	x	1	power	x^3	x^2	x	1	power	x^3	x^2	x	1	power	x^3	x^2	x	1
⓪	0	0	0	1	22	w_2	w_2	w_1	w_1	44	w_2	w_1	w_1	w_1	㊻	0	1	w_2	w_1
①	0	0	1	0	㉓	0	w_2	w_2	1	45	1	w_2	w_2	1	67	1	w_2	w_1	0
②	0	1	0	0	24	w_2	w_2	1	0	46	w_1	1	w_2	w_1	68	w_1	0	w_1	w_1
3	1	0	0	0	㉕	0	0	1	1	47	w_2	0	1	w_2	69	w_1	1	1	w_2
4	1	w_1	w_1	w_1	㉖	0	1	1	0	48	w_2	0	w_1	1	70	w_2	w_1	0	w_2
5	w_2	0	0	w_1	27	1	1	0	0	49	w_2	w_2	0	1	71	1	1	w_1	1
6	w_2	1	w_2	1	㉘	0	w_1	w_1	w_1	㊿	0	1	0	1	㉒	0	0	w_2	w_1
7	w_1	w_1	0	1	29	w_1	w_1	w_1	0	51	1	0	1	0	㉓	0	w_2	w_1	0
⑧	0	w_2	w_1	w_2	㉚	0	1	w_2	w_2	52	1	w_2	w_1	w_1	74	w_2	w_1	0	0

9	$\omega_2\ \omega_1\ \omega_2\ 0$	31	$1\ \omega_2\ \omega_2\ 0$	53	$\omega_1\ 0\ 0\ \omega_1$	75	$1\ 1\ 1\ 1$
10	$1\ \omega_1\ 1\ 1$	32	$\omega_1\ 1\ \omega_1\ \omega_1$	54	$\omega_1\ \omega_2\ 1\ \omega_2$	(76)	$0\ \omega_2\ \omega_2\ \omega_1$
11	$\omega_2\ \omega_2\ \omega_2\ \omega_1$	33	$\omega_2\ 1\ 1\ \omega_2$	55	$1\ \omega_1\ 0\ \omega_2$	77	$\omega_2\ \omega_2\ \omega_1\ 0$
(12)	$0\ \omega_1\ \omega_2\ 1$	34	$\omega_1\ 0\ \omega_1\ 1$	56	$\omega_2\ \omega_1\ 1\ \omega_1$	(78)	$0\ \omega_2\ 1\ 1$
13	$\omega_1\ \omega_2\ 1\ 0$	35	$\omega_1\ 1\ \omega_1\ \omega_2$	57	$1\ 0\ \omega_2\ 1$	79	$\omega_2\ 1\ 1\ 0$
14	$1\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_2$	36	$\omega_2\ 1\ 0\ \omega_2$	58	$1\ 1\ \omega_2\ \omega_1$	80	$\omega_1\ 0\ 1\ 1$
15	$\omega_2\ 1\ 1\ \omega_1$	37	$\omega_1\ 1\ \omega_1\ 1$	(59)	$0\ 1\ 0\ \omega_1$	81	$\omega_1\ \omega_1\ \omega_1\ \omega_2$
16	$\omega_1\ 0\ \omega_2\ 1$	38	$\omega_2\ 1\ \omega_1\ \omega_2$	60	$1\ 0\ \omega_1\ 0$	(82)	$0\ 1\ 0\ \omega_2$
17	$\omega_1\ 0\ \omega_1\ \omega_2$	39	$\omega_1\ \omega_2\ \omega_1\ 1$	61	$1\ 0\ \omega_1\ \omega_1$	83	$1\ 0\ \omega_2\ 0$
18	$\omega_1\ 1\ 0\ \omega_2$	40	$1\ 1\ \omega_1\ \omega_2$	62	$1\ 0\ 0\ \omega_1$	84	$1\ 1\ \omega_1\ \omega_1$
19	$\omega_2\ \omega_2\ 0\ \omega_2$	(41)	$0\ 0\ 1\ \omega_1$	63	$1\ \omega_1\ 0\ \omega_1$	85	$0\ 0\ 0\ \omega_1$
(20)	$0\ 1\ \omega_1\ 1$	(42)	$0\ 1\ \omega_1\ 0$	64	$\omega_2\ \omega_1\ 0\ \omega_1$		以下略
21	$1\ \omega_1\ 1\ 0$	43	$1\ \omega_1\ 0\ 0$	65	$1\ 1\ \omega_2\ 1$		

(例3) $v=b=85$, $k=r=21$, $\lambda=5$ の symmetrical BIBD

この design は $PG(3,4):2$ によって与えられる.

$(t+1, d+1)=(4,3)=1$ だから cycle は $v=85$ だけである. また, $\eta=b/v=1$ だから initial 2-flat はただ一つである.

そこで initial 2-flat として $V_2(0)=\{(a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2)\}$ をとると, $V_2(0)$ 上の点を座標表現した場合 x^3 の係数は0であるから (例2) の Table 1 において第一座標が0の点のみを拾えばよい.

かくしてこの design を生成する次の difference set を得る.

$\{0, 1, 2, 8, 12, 20, 23, 25, 26, 28, 30, 41, 42, 50, 59, 66, 72, 73, 76, 78, 82\}$ $(\mathrm{mod}\ 85)$

3. BIBD $PG(t,m)$: d の blocks 及び treatments の一部を除いて得られる PBIBD

標記に関する例として，任意の一点及びこの点を通るすべての d-flats を取り除いて得られる PBIBD や，BIBD $EG(t,m)$: d において原点及び原点を通るすべての d-flats を取り除いて得られる PBIBD などが知られている [3]。

ここでは，cycle の立場から問題を取り上げることにする。

我々は [5] において次の結果を得ている。

(i) 1°) $(t+1, d+1)=1$ ならば $PG(t,m)$ におけるすべての d-flats は $m.c.$ v をもち，$\eta=\phi(t,d,m)/v$ 個の initial flats から生成される。

2°) $(t+1, d+1)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_e^{\alpha_e}\ (>1)$ ならば $\prod_{i=1}^{e}(1+\alpha_i)$ 個の異なる $m.c.$ が存在する。

$$\begin{aligned}
&\theta[x_1,\cdots,x_e]=(m^{t+1}-1)/(m^{p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e}}-1),\\
&t[x_1,\cdots,x_e]=(t+1)/(p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e})-1, \qquad (3.1)\\
&d[x_1,\cdots,x_e]=(d+1)/(p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e})-1,\\
&m[x_1,\cdots,x_e]=m^{p_1^{x_1}\cdots p_e^{x_e}}
\end{aligned}$$

とおくと，$\theta[x_1,\cdots,x_e]$ をそれぞれ cycle 及び $m.c.$ とする d-flats の個数はそれぞれ

$$n(x_1,\cdots,x_e)=\phi(t[x_1,\cdots,x_e],\ d[x_1,\cdots,x_e],\ m[x_1,\cdots,x_e]),\qquad (3.2)$$

$$n^*(x_1,\cdots,x_e)=n(x_1,\cdots,x_e),$$

$$n^*(x_1,\cdots,x_e)=n(x_1,\cdots,x_e)-\sum_{x_j\le y_j\le\alpha_j;\ \exists j,\ x_j<y_j} n^*(y_1,\cdots,y_e).\qquad (3.3)$$

である.

(ii) (i)の 2°) の条件の下で, 任意の2点 (x^α) と (x^β) とを通る cycle $\theta[x_1,\cdots,x_e]$ の d-flats の個数は

$\alpha\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ \theta[x_1,\cdots,x_e])$ のとき

$$\lambda_1(x_1,\cdots,x_e)=\phi(t[x_1,\cdots,x_e]-1,\ d[x_1,\cdots,x_e]-1,\ m[x_1,\cdots,x_e]),\qquad (3.4)$$

$\alpha\not\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ \theta[x_1,\cdots,x_e])$ のとき

$$\lambda_2(x_1,\cdots,x_e)=\phi(t[x_1,\cdots,x_e]-2,\ d[x_1,\cdots,x_e]-2,\ m[x_1,\cdots,x_e])\qquad (3.5)$$

で与えられる.

以下, $(t+1,\ d+1)>1$ と仮定する.

(1) PG(t,m): d において cycle $\theta[x_1,\cdots,x_e](\ll v)$ の d-flats をすべて除いて得られる PBIB D

任意の2点 (x^α) と (x^β) とに対して

$\alpha\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ \theta[x_1,\cdots,x_e])$ のとき (x^α) と (x^β) とは 1st associate,

$\alpha\not\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ \theta[x_1,\cdots,x_e])$ のとき (x^α) と (x^β) とは 2nd associate,

任意の点はそれ自身と 0-th associate

の関係にあると定義すると, 次の parameters をもつ N_2 type の PBIBD が得られる.

$$v=\phi(t,0,m),\quad b=\phi(t,d,m)-\phi(t[x_1,\cdots,x_e],\ d[x_1,\cdots,x_e],\ m[x_1,\cdots,x_e]),$$

$k=\phi(d,0,m)$, $r=\phi(t-1,d-1,m)-\lambda_1(x_1,\cdots,x_e)$,

$\lambda_1=\phi(t-2,d-2,m)-\lambda_1(x_1,\cdots,x_e)$, $\lambda_2=\phi(t-2,d-2,m)-\lambda_2(x_1,\cdots,x_e)$,

$n_1=r(x_1,\cdots,x_e)-1$, $n_2=r(x_1,\cdots,x_e)\{\theta[x_1,\cdots,x_e]-1\}$

ただし $r(x_1,\cdots,x_e)=v/\theta[x_1,\cdots,x_e]$.

$$\begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r(x_1,\cdots,x_e) & 0 \\ 0 & r(x_1,\cdots,x_e)\{\theta[x_1,\cdots,x_e]-1\} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & r(x_1,\cdots,x_e)-1 \\ r(x_1,\cdots,x_e)-1 & r(x_1,\cdots,x_e)\{\theta[x_1,\cdots,x_e]-2\} \end{bmatrix}$$

(2) $PG(t,m):d$ において m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_e]$ $(<v)$ の d-flats を blocks に，原始元のべきの指数が $\theta[x_1,\cdots,x_e]$ 未満の点を treatments にとることによって得られる PBIBD

$PG(t,m):d$ において treatments はカットせずに m.c. $\theta[x_1,\cdots,x_e]$ の d-flats を blocks とする design も考えられるが，これは標記の PBIBD と $r(x_1,\cdots,x_e)$ 個たてに並べた design であり，$\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,\theta[x_1,\cdots,x_e])$ のとき (x^α) と (x^β) とは 1st associate の関係にあると定義すると常に 繰返し数 r は会合数 λ_1 に等しくなる．したがって以下 標記の design のみについて考察する．

しかしながら，この design も BIBD $PG(t[x_1,\cdots,x_e],m[x_1,\cdots,x_e]):d[x_1,\cdots,x_e]$ ([5]) において m.c. $\tilde{v}=\theta[x_1,\cdots,x_e]$ の $d[x_1,\cdots,x_e]$-flats のみを blocks とする design であるから，元の BIBD $PG(t,m):d$ において m.c. $v=(m^{t+1}-1)/(m-1)$ の d-flats のみを blocks とする design について論議して一般性を失わない．

(a) $(t+1, d+1) = p^{\alpha}$ の場合

この場合 m.c.v の d-flats を blocks とする design は $PG(t,m):d$ から cycle $\theta[1] = (m^{t+1}-1)/(m^{p}-1)$ の d-flats を取り除いて得られるから，(1) の場合に帰着される．

(b) $(t+1, d+1) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell}$ の場合

この場合 異なる m.c. は $\prod_{i=1}^{\ell}(1+\alpha_i)$ 個存在し，これらの m.c. の間の約数関係は極めて複雑である．そこで一般論は別の機会に譲ることにして，ここでは最も簡単な一例をあげるに止める．

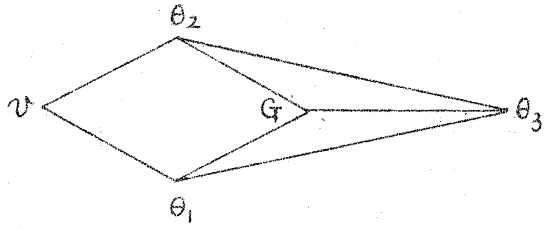
(例4) $(t+1, d+1) = p_1 p_2$ (p_1, p_2 は異なる素数) の場合

$v = (m^{t+1}-1)/(m-1)$，$\theta_1 \equiv \theta[1,0] = (m^{t+1}-1)/(m^{p_1}-1)$，$\theta_2 \equiv \theta[0,1] = (m^{t+1}-1)/(m^{p_2}-1)$，$\theta_3 \equiv \theta[1,1] = (m^{t+1}-1)/(m^{p_1 p_2}-1)$ とおくと，d-flats の m.c. は $v, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ の4個である．

これらの m.c. の間には次の関係がある．

θ_1, θ_2 の L.C.M. $= v$，

θ_1, θ_2 の G.C.M. $= G = \dfrac{(m^{p_1 p_2}-1)(m-1)}{(m^{p_1}-1)(m^{p_2}-1)}\ \theta_3$ ．



[定義] 任意の2点 (x^{α}) と (x^{β}) に対して

$\alpha \equiv \beta \pmod{\theta_1}$ のとき (x^{α}) と (x^{β}) とは 1st associate，

$\alpha \equiv \beta \pmod{\theta_2}$ のとき 〃 2nd associate，

$\alpha \not\equiv \beta \pmod{\theta_1, \theta_2}$, $\alpha \equiv \beta \pmod{G}$ のとき (x^α)と(x^β)とは 3rd associate,

$\alpha \not\equiv \beta \pmod{G}$, $\alpha \equiv \beta \pmod{\theta_3}$ のとき 〃 4-th associate,

$\alpha \not\equiv \beta \pmod{\theta_3}$ のとき 〃 5-th associate,

任意の点はそれ自身と 0-th associate

の関係にあると定義すると，この関係は association scheme のみたすべき条件を満足することがわかる.

よってこの design は 次の parameters をもつ 5 associate classes の PBIBD である.

(i) $v = \phi(t,0,m)$,

$b = \phi(t,d,m) - \phi(t[1,0], d[1,0], m[1,0]) - \phi(t[0,1], d[0,1], m[0,1]) + \phi(t[1,1], d[1,1], m[1,1])$,

$r = \phi(t-1, d-1, m) - \lambda_1(1,0) - \lambda_1(0,1) + \lambda_1(1,1)$,

$\lambda_1 = \phi(t-2, d-2, m) - \lambda_1(1,0) - \lambda_2(0,1) + \lambda_1(1,1)$,

$\lambda_2 = \phi(t-2, d-2, m) - \lambda_2(1,0) - \lambda_1(0,1) + \lambda_1(1,1)$,

$\lambda_3 = \lambda_4 = \phi(t-2, d-2, m) - \lambda_2(1,0) - \lambda_2(0,1) + \lambda_1(1,1)$,

$\lambda_5 = \phi(t-2, d-2, m) - \lambda_2(1,0) - \lambda_2(0,1) + \lambda_2(1,1)$,

$n_1 = v/\theta_1 - 1$, $n_2 = v/\theta_2 - 1$, $n_3 = v/G - v/\theta_1 - v/\theta_2 + 1 = n_1 n_2$,

$n_4 = v/\theta_3 - v/G$, $n_5 = v - v/\theta_3$

(ii) $p_{11}^1 = n_1 - 1$, $p_{12}^1 = 0$, $p_{13}^1 = 0$, $p_{14}^1 = 0$, $p_{22}^1 = 0$,

$p_{11}^2 = 0$, $p_{12}^2 = 0$, $p_{13}^2 = n_1$, $p_{14}^2 = 0$, $p_{22}^2 = n_2 - 1$,

$p_{11}^3 = 0$, $p_{12}^3 = 1$, $p_{13}^3 = n_1 - 1$, $p_{14}^3 = 0$, $p_{22}^3 = 0$,

$p_{11}^4 = 0$, $p_{12}^4 = 0$, $p_{13}^4 = 0$, $p_{14}^4 = n_1$, $p_{22}^4 = 0$,

$$p_{11}^5=0,\quad p_{12}^5=0,\quad p_{13}^5=0,\quad p_{14}^5=0,\quad p_{22}^5=0,$$
$$p_{23}^1=n_2,\quad p_{24}^1=0,\quad p_{33}^1=n_3-n_2,\quad p_{34}^1=0,\quad p_{44}^1=n_4,$$
$$p_{23}^2=0,\quad p_{24}^2=0,\quad p_{33}^2=n_3-n_1,\quad p_{34}^2=0,\quad p_{44}^2=n_4,$$
$$p_{23}^3=n_2-1,\quad p_{24}^3=0,\quad p_{33}^3=n_3-n_2-n_1+1,\quad p_{34}^3=0,\quad p_{44}^3=n_4,$$
$$p_{23}^4=0,\quad p_{24}^4=n_2,\quad p_{33}^4=0,\quad p_{34}^4=n_3,\quad p_{44}^4=n_4-n_1-n_2-n_3-1,$$
$$p_{23}^5=0,\quad p_{24}^5=0,\quad p_{33}^5=0,\quad p_{34}^5=0,\quad p_{44}^5=0.$$

(註) 一般に, Association scheme の第三の条件(3)は次の条件:

(3)' $m\left[\binom{m-1}{2}+m-1\right]$ 個の p_{jk}^i ($i=1,2,\cdots,m$; $j,k=1,2,\cdots,m-1$) が i-th associate の関係にある treatment pair (α,β) の選び方に無関係で, かつ, $j\neq k$ なる $m\binom{m-1}{2}$ 個の p_{jk}^i について

$p_{jk}^i=p_{kj}^i$ ($i=1,2,\cdots,m$) である.

と同値であることが容易に示される.

(例4)において $p_{jk}^i=p_{kj}^i$ は定義より明らかであるから, 第二種の parameters は上記のものについて調べれば十分である.

参考文献

[1] Alanen,J.D.and Knuth,D.E.(1964). Tables of finite fields. Sankhyā Ser.A 26 305-328.

[2] Bose,R.C.(1939). On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eugenics 9 353-399.

[3] Chakrabarti,M.C.(1962). Mathematics of design and analysis of experiments. Asia publishing House, Bombay.

[4] Rao,C.R.(1945). Finite geometries and certain derived results in theory of numbers. Proc. Nat. Inst. Sci. India 11 136-149.

[5] Yamamoto,S.,Fukuda,T.and Hamada,N.(1966). On finite geometries and cyclically generated incomplete block designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser.A-1 30 137-149.